

Lösung linearer Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Statt durch Probieren wollen wir die Lösung \vec{k} des LGS nun mittels **Gauß-Jordan-Verfahren** bestimmen. Wir nehmen an, der Vektor $\vec{t} = (3 \ 2 \ 3 \ 5)^\top$ enthält gemessene Laufzeiten und das zugehörige Modell soll bestimmt werden.

Im LGS $\mathbf{S} \cdot \vec{k} = \vec{t}$ wird \mathbf{S} als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet.

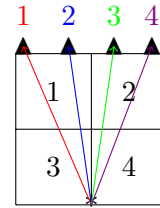


Abb. 1 (nicht maßstabsgerecht)

a) Erstellen Sie die **erweiterte Koeffizientenmatrix** \mathbf{E} , indem Sie an die Koeffizientenmatrix \mathbf{S} eine weitere Spalte mit dem entsprechenden Laufzeitvektor anhängen.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} & t_{1,1} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,4} & t_{2,1} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} & s_{3,4} & t_{3,1} \\ s_{4,1} & s_{4,2} & s_{4,3} & s_{4,4} & t_{4,1} \end{pmatrix} =$$

b) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion **rref** auf dem CAS die Lösung des LGS. (Hinweis: **rref** verlangt als Eingabeargument die erweiterte Koeffizientenmatrix, also **rref(E)**, und liefert die reduzierte Stufenform dieser zurück.)

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} =$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Slownessvektor, den Sie zur Berechnung der Laufzeiten verwendet haben.

Aufgabe 2

Beschreiben Sie die Lösungsmenge für den nebenstehend abgebildeten Fall (Abb. 2): 4 Zellen, 2 Strahlen. (Hinweis: Wieviele Gleichungen stehen zur Verfügung, um die vier Unbekannten k_1, k_2, k_3, k_4 zu bestimmen?)

Stellen Sie das zugehörige LGS auf. Welche Formate besitzen \mathbf{S} , \vec{k} und \vec{t} ?

Formulieren Sie eine Bedingung an das Format der Koeffizientenmatrix für den Fall eines **unterbestimmten LGS**.

Für welches Format der Koeffizientenmatrix ergibt sich ein **überbestimmtes LGS**?

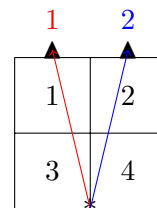


Abb. 2 (nicht maßstabsgerecht)

Aufgabe 3

Im Fall eines **überbestimmten LGS** (Abb. 3) gibt es folgende Arten von Lösungsmengen:

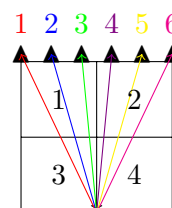


Abb. 3 (nicht maßstabsgerecht)

1. **genau eine Lösung**, wenn gilt: Es gibt **genau so viele unabhängige Gleichungen wie Unbekannte**. Die Laufzeiten t_5 und t_6 liefern bei exakter Berechnung keine neue Information.
2. **unendlich viele Lösungen**, wenn gilt: Es gibt **weniger unabhängige Gleichungen als Unbekannte**. Setzen wir beispielsweise alle von Null verschiedenen Weglängen 1 und $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ enthält das LGS nur 2 voneinander unabhängige Gleichungen zur Bestimmung von 4 Unbekannten und hat damit unendlich viele Lösungen.
3. **keine Lösung**, wenn gilt: Es gibt **mehr unabhängige Gleichungen als Unbekannte**. Hier ergeben sich Widersprüche zwischen den Gleichungen. Das kann z.B. passieren, wenn wir im Laufzeitvektor Messfehler berücksichtigen. Gesucht ist dann eine Lösung des LGS im Sinne der Ausgleichsrechnung, welches einen möglichst kleinen Gesamtfehler liefert.

Die Anzahl unabhängiger Gleichungen in einem LGS entspricht dem **Rang** der erweiterten Koeffizientenmatrix.

a) Bestimmen Sie die Anzahl unabhängiger Gleichungen für das mit \mathbf{S} , \vec{k} und \vec{t} , indem Sie mit dem CAS den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix \mathbf{E} berechnen ($\text{rank}(\mathbf{E})$). Schlussfolgern Sie welcher Art die Lösungsmenge ist.

b) Erstellen Sie eine rechteckige Koeffizientenmatrix $\mathbf{S1}$ und einen entsprechenden Laufzeitvektor $\vec{t1}$ (z.B. 2 Strahlen, 4 Zellen), die zu einem unterbestimmten LGS führen. Überprüfen Sie anhand des Rangs der erweiterten Koeffizientenmatrix.

c) Erstellen Sie eine rechteckige Koeffizientenmatrix $\mathbf{S2}$ und einen entsprechenden Laufzeitvektor $\vec{t2}$ (z.B. 6 Strahlen, 4 Zellen), die zu einem überbestimmten LGS führen. Wählen Sie dabei den Laufzeitvektor so, dass das LGS

- (1) genau eine Lösung besitzt,
- (2) keine Lösung besitzt.